Ueber Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik*

Von
Prof. C. Liebermeister
in Tübingen

1877

Typesetting by Leonhard Held

Schon häufig ist uns praktischen Aerzten von theoretischer Seite in unwiderleglicher Weise gezeigt worden, dass alle unsere Schlüsse über Vorzüge und Nachtheile einzelner Behandlungsmethoden, insofern sie auf die Statistik des thatsächlichen Erfolgs gegründet sind, vollständig in der Luft stehen, so lange wir nicht die strengen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden. In der That, wenn bei der einen Behandlungsweise die beobachteten Ausgänge günstiger gewesen sind als bei einer anderen, so kann dies eben so gut auf Zufall beruhen, wie es unzweifelhaft auf Zufall beruht, wenn bei einem Hasardspiel mit gleichen Chancen heute der Eine und morgen der Andere gewinnt. Die einfache Thatsache, dass bei der einen Behandlungsweise von 100 Kranken 20 und bei der anderen von 100 Kranken 10 gestorben sind, beweist an sich noch nicht, dass die zweite Behandlungsmethode den Vorzug verdiene, und gibt noch keine Sicherheit, dass nicht vielleicht das nächste Mal bei Anwendung dieser zweiten Behandlungsmethode 30 von 100 sterben werden. Wenn wir aus den thatsächlichen Erfolgen Schlüsse ziehen wollen, so ist die unumgänglich nothwendige Vorbedingung, zu untersuchen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die beobachteten Verschiedenheiten des Erfolgs nicht einfach dem Zufall zuzuschreiben sind. Und für diese Frage gibt nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung den nöthigen Anhalt.

Seite 935
Seite 936

Freilich ist mit der Erledigung dieses mathematischen oder formellen Theiles unsere Aufgabe noch lange nicht abgeschlossen. Vielmehr kommt dann noch die Frage zur Erörterung, ob die beiden Beobachtungsreihen, bei denen die Verschiedenheit des Erfolges bei verschiedener Behandlung stattfand, auch wirklich in jeder anderen Beziehung als vergleichbar zu betrachten seien, ob nicht vielleicht eine entscheidende Aenderung des Krankheitscharakters, der Intensität der Krankheitsursache stattgefunden hat, ob

*Die vorliegende Arbeit ist dem wesentlichen Inhalte nach ein Kapitel aus einer Vorlesung über die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf Medicin und Naturwissenschaften.

nicht eine Aenderung in den mancherlei anderen Momenten, von denen der Ausgang der Krankheiten abhängig sein kann, die Verschiedenheit des beobachteten Erfolgs bedingt habe. Es wäre offenbar verkehrt, wenn man die Lösung dieser Aufgabe von der mathematischen Analyse verlangen wolle. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt uns mit aller Schärfe an, mit welchem Grade von Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist, *dass* in den constanten Bedingungen, von welchen der Erfolg abhängt, eine Verschiedenheit bestanden hat; sie ist aber gänzlich unfähig, über die Art dieser Verschiedenheit Etwas auszusagen. Die Erforschung der Ursachen, und namentlich die Frage, ob dieselben in der Verschiedenheit der Behandlung oder in der Verschiedenheit anderer constanter Bedingungen zu suchen seien, ist Sache der *klinischen Analyse*.

Dieser letztere Theil der Frage, offenbar der bei Weitem schwierigere, ist in neuerer Zeit bei den besseren Arbeiten, in welchen therapeutische Statistik verwerthet wurde, gewöhnlich mit genügender Sorgfalt und ausreichender Gründlichkeit behandelt worden, so dass von dieser Seite häufig die gezogenen Schlussfolgerungen keinen Einwand zulassen. Der rein formelle mathematische Theil der Aufgabe ist dagegen meist bei diesen Arbeiten gar nicht berührt worden. Und doch lässt sich nicht in Abrede stellen, dass die Erledigung desselben die nothwendige Vorbedingung für die Verwerthung der Beobachtungen bildet.

Wenn die Aerzte bisher so selten von der Wahrscheinlichkeitsrechung Gebrauch gemacht haben, so ist die Ursache davon weniger darin zu suchen, dass sie etwa dieser Disciplin nicht die gebührende Bedeutung beigelegt hätten; es beruht vielmehr hauptsächlich auf dem Umstande, dass bisher der analytische Apparat zu unvollkommen und unbequem war. Von den Mathematikern ist auf die Ausarbeitung der Methoden, welche zur Lösung der Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechung erforderlich sind, ein bewundernswürdiger Scharfsinn verwendet worden. Manche Theile der Wahrscheinlichkeitsrechung, wie z. B. diejenigen, welche für das Versicherungswesen von Bedeutung sind, sowie einzelne Methoden, welche auf die Resultate der beobachteten Naturwissenschaften sich anwenden lassen — ich erinnere an die Methode der kleinsten Quadrate —, sind bis zu einem Grade vollendet worden, dass auch der Nicht-Mathematiker mit leichter Mühe im Stande ist sie zu benutzen. — Nicht des Seite 937
gleichen Grades von Sorgfalt haben sich bisher diejenigen analytischen Methoden zu erfreuen gehabt, welche für den Arzt vorzugsweise verwhertbar sein würden; und namentlich die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung auf therapeutische Statistik ist noch keineswegs bis zu dem Grade ausgearbeitet worden, dass die vorkommenden Fragen mit hinreichender Sicherheit gelöst werden könnten. Von den Mathematikern wird gewöhnlich dieses Problem nur indirect berührt, aber nicht direct in Angriff genommen. Und was dem Nicht-Mathematiker bisher an praktisch anwendbaren Formeln geboten worden ist, kann nicht als eine exacte und umfassende Lösung der Aufgabe angesehen werden, sondern nur als ein Nothbehelf, der für einzelne Fälle eine ausreichende Annäherung zu einer Lösung geben kann, bei den meisten in praxi vorkommenden Fällen aber versagt.

Am eingehendsten ist das vorliegende Problem von Poisson behaldelt worden. Obwohl auch dieser Mathematiker die Aufgabe nicht in directer Weise in Angriff nimmt, so hat doch die bewundernswürdige Beherrschung der analytischen Methoden, durch

welche derselbe sich auszeichnet, es ihm möglich gemacht, verhältnissmässig einfache Formeln herzustellen, welche innerhalb gewisser Grenzen mit hinreichender Annäherung eine Berechnung gestatten. Es konnten freilich diese Formeln ihre bequeme Einfachheit nur erhalten auf Kosten der Genauigkeit, indem für die Rechnung unbequeme Glieder weggelassen wurden. Aus diesem Grunde sind sie nur dann annährend richtig, wenn die Beobachtungsreihen aus sehr grossen Zahlen bestehen. Sie verlangen immer mindestens Hunderte und oft viele Tausende von Einzelbeobachtungen. Nun haben die Mathematiker gut sagen: Ihr Aerzte müsst, wenn Ihr sichere Schlüsse ziehen wollt, immer mit grossen Zahlen arbeiten; Ihr müsst Tausende oder Hunderttausende von Beobachtungen zusammenstellen. —Das ist ja eben bei therapeutischer Statistik gewöhnlich nicht möglich. Wenn es sich darum handelt, welche Behandlungsweise bei der Pneumonie den Vorzug verdiene, oder welche Methode der Operation bei einer chirurgischen Krankheit die besser sei, — wo ist der Arzt, der zuerst einige Tausend Fälle nach der einen und dann einige Tausend nach der anderen behandeln könnte? Und wenn man sich damit helfen wollte, dass man die Resultate verschiedener Beobachter, die zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten gewonnen wurden, zusammenstellte, dann würde man vielleicht die verlangten Tausende erhalten; aber dann würden meist die verglichenen Gruppen nicht mehr gleichartig und alle Schlüsse illusorisch sein. Nur in seltenen Fällen sind bei therapeutischer Statistik die Bedingungen, wie sie von den Mathematikern bisher gefordert werden, zu erfüllen. Wenn sie aber erfüllt sind, — dann kann es oft fraglich erscheinen, ob dann die Seite 938
Wahrscheinlichkeitsrechung noch so dringend nöthig sei. Wenn man z. B. die Erfolge der antipyretischen Behandlung des Abdominaltyphus mit denen der exspectativen Behandlung vergleichen will, wenn man sieht, dass ohne Ausnahme überall, wo die antipyretische Methode in einigermassen zweckmässiger Weise angeordnet wurde, die Mortalität auf einen Bruchtheil der früheren herabgesetzt worden ist, wenn für einzelne Spitäler die zu vergleichenden Fälle bereits nach Tausenden zählen, — wer wird da noch die Wahrscheinlichkeitsrechung für nothwendig halten, um zu der Ueberzeugung zu kommen, dass die antipyretische Behandlung die bessere sei? — Gerade in den Fällen, in welchen die blosse Betrachtung der Zahlen nicht genügt, um eine sichere Ueberzeugung zu gewinnen, in welchen also nur durch Rechnung erkannt werden könnte, ob für die Bedeutung einer Differenz ein gewisser Grad von Wahrscheinlichkeit und welcher Grad derselben vorhanden sei, lassen die Formeln im Stich; und sie können selbst bei sehr grossen Zahlen, falls es sich um geringe und darum für den ersten Blick in ihrer Bedeutung zweifelhafte Differenzen handelt, zuweilen in störender Weise ungenau werden.

Die Forderung der Mathematiker, immer nur grosse Zahlen zu den Schlüssen zu verwenden, ist von den Vertretern der medicinischen Statistik gewöhnlich ohne Widerspruch angenommen worden. Dieselben beeifern sich, bei jeder Gelegenheit den Aerzten als ein unumstössliches Dogma einzuschärfen, dass Beobachtungsreihen, welche nicht aus sehr grossen Zahlen bestehen, überhaupt Nichts beweisen können, dass es unwissenschaftliches sei, aus kleinen Zahlen Schlüsse ziehen zu wollen. — Aber ist denn eine solche Behauptung wirklich in der Natur der Sache begründet? Wenn Jemand nur 12 Fälle von Wechselfieber exspectativ und 12 andere Fälle mit Chinin

behandelt hätte, würde das nicht genügen, um auch ohne Rechnung die der Gewissheit nahe kommende Ueberzeugung zu gewinnen, dass das Chinin beim Wechselfieber nützlich sei? Wenn die Rechnung mit einem solchen unzweideutigen Resultat Nichts anzufangen weiss, so ist das eben doch nur ein Mangel der Rechnung und ein Beweis dafür, dass die mathematischen Methoden noch höchst unvollkommen sind. In der That hat die Forderung der grossen Zahlen nur insofern bisher eine gewisse Berechtigung gehabt, als uns die Mathematiker bisher noch keine Methode geliefert haben, welche eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung auf weniger grosse Zahlen gestatte. Eine exacte und umfassende Lösung des Problems muss aber eben so gut auf kleine wie auf grosse Zahlen anwendbar sein. Freilich wird sich immer ergeben, dass bei kleinen Zahlen eine bedeutsame Verschiedenheit der Beobachtungsresultate vorhanden sein muss, damit ein gewisser Grad von Wahrscheinlichkeit erreicht werde, während bei grossen Beobachtungsreihen für den gleichen Grad der Wahrscheinlichkeit schon eine geringe Differenz der Resultate genügt. Aber es gibt Verhältnisse, bei denen Seite 939
schon die Vergleichung von Beobachtungsreihen, welche aus kleinen Zahlen bestehen, für die Ausschliessung des Zufalls eine Wahrscheinlichkeit ergibt, die der Gewissheit sehr nahe kommt.

Die Poisson'schen Formeln sind bisher die einzige Methode gewesen, welche auf therapeutische Statistik angewendet wurde; und in der Anwendung derselben sind die Aerzte nicht immer glücklich gewesen[1]. Zuerst wurde sie von Gavarret[2] verwerthet, und später haben alle Aerzte, welche sich mit medicinischer Statistik beschäftigten, die gleichen Formeln benutzt, so namentlich Schweig[3], A. Fick, Oesterlen[4], Jessen[5], Hirschberg[6]. Gavarret nimmt, wie es Poisson bei einzelnen speciellen Aufgaben gethan hatte, einigermassen willkürlich eine Wahrscheinlichkeit von 0,9953 oder $\frac{212}{213}$, also eine Wahrscheinlichkeit, welche 212 gegen 1 wetten lassen würde, als ausreichend an, und die Formeln sind so eingerichtet, dass sie erkennen lassen, ob ein therapeutisch-statistisches Resultat mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{212}{213}$ oder 212 gegen 1 als nicht zufällig zu betrachten ist, oder ob dieser Grad von Wahrscheinlichkeit nicht erreicht wird. Auch hat er eine Tabelle berechnet, welche die Grenzen angibt, für die mit dem angegebenen Grade von Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, dass sie von den zufälligen Abweichungen statistischer Resultate nicht überschritten werden. Diese Tabelle wird in mehr oder weniger veränderter Form auch mitgetheilt von Fick, Jessen, Hirschberg.

Es lässt sich nicht in Abrede stellen, dass diese Tabellen unter Umständen eine gewisse Brauchbarkeit besitzen. Aber sowohl die Tabellen als auch die Poisson'schen Formeln in der Gestalt, in welcher sie bisher für die medicinische Statistik empfohlen

[1] Eine gute elementare Anleitung zur Benutzung derselben findet sich bei: Fick, Medicinische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1866. Anhang.

[2] J. Gavarret, Allgemeine Grundsätze der medicinischen Statistik. Uebersetzt von Landmann. Erlangen 1844. — In dieser Uebersetzung sind einzelne Formeln bis zur Unkenntlichkeit entstellt.

[3] Auseinandersetzung der statistischen Methode. Archiv für physiologische Heilkunde. XIII. 1854 S. 305.

[4] Handbuch der medicinischen Statistik. Tübingen 1865. S. 60

[5] Zur analytischen Statistik. Zeitschift für Biologie. III. 1867. S. 128.

[6] Die mathematischen Grundlagen der medizinischen Statistik. Leipzig 1874.

wurden, sind weit davon entfernt, für die Bedürfnisse des ärztlichen Beobachters auszureichen.

Zunächst ist es ein Mangel, dass daraus nur zu ersehen ist, ob der angenommene Grad der Wahrscheinlichkeit von 212 gegen 1 erreicht ist oder nicht. Wie nun, wenn Seite 940
dieser Grad der Wahrscheinlichkeit nicht erreicht ist? Sollen denn etwa alle Beobachtungsreihen, bei welchen die Wahrscheinlichkeit für Ausschliessung des Zufalls nicht ganz 212 gegen 1 beträgt, vollkommen werthlos sein? Wäre es nicht auch schon ein bemerkenswerthes Resultat, wenn wir die Wahrscheinlichkeit von 100 gegen 1 hätten, dass eine bestimmte Behandlungsweise bessere Resultate gebe als eine andere? Und würden wir nicht selbst dann, wenn die Wahrscheinlichkeit des Vorzugs der einen Behandlungsweise nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen nur 10 gegen 1 betrüge, doch für den nächsten Fall lieber diese als die andere anwenden? Wir sind doch wahrhaftig in den empirischen Grundlagen der Therapie nicht so reich an Goldmünzen, dass man uns rathen könnte, alle Silbermünzen ins Wasser zu werfen! Und eine Hand voll Silbermünzen ist oft mehr werth als ein einzelnes Goldstück. In der That, wenn die Wahrscheinlichkeitsrechung für die Beurtheilung therapeutischer Resultate mit Nutzen und in ausgedehnter Weise angewendet werden soll, so ist erforderlich: nicht, dass man mittelst einer Tabelle oder Formel sich überzeugen könne, es sei für die Ausschliessung des Zufalls ein gewisser willkürlich angenommener Grad von Wahrscheinlichkeit erreicht oder nicht erreicht; sondern vielmehr, dass man für jedes vorliegende Beobachtungsmaterial mit Sicherheit und Genauigkeit berechnen könne, mit w e l c h e m Grade von Wahrscheinlichkeit der Zufall ausgeschlossen ist. Erst wenn dies möglich ist, dann können wir alle unsere Beobachtungsreihen in wissenschaftlicher Weise verwerthen, indem wir jeder derselben genau den Werth beilegen, welcher ihr zukommt[7].

Ferner ist es für die praktische Verwerthung sehr ungünstig, dass diese Tabellen gewöhnlich erst mit der Zahl 300, ausnahmsweise mit 200 anfangen. Beobachtungsreihen, welche nicht mindestens so viel Fälle umfassen, können daher gar nicht in Betracht gezogen werden[8]. Offenbar sind dadurch die meisten in praxi vorkommenden Beobachtungsreihen von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung ausgeschlossen.

Endlich aber lassen sich jene Tabellen überhaupt nicht in directer Weise auf das Seite 941
vorliegende Problem anwenden; und wenn dies zuweilen dennoch geschehen ist, so entsprach dies keineswegs der wirklichen Bedeutung der Poisson'schen Formeln, und die Ergebnisse mussten nothwendig unrichtig sein. Es kommt vor, dass bei

[7] In der richtigen Erkenntnis, dass das Festhalten an der Forderung einer Wahrscheinlichkeit von 212 gegen 1 auch für die Fälle, bei denen sie eben thatsächlich nicht zu erreichen ist, den factischen Bedürfnissen der Heilkunde nicht entspreche, hat H i r s c h b e r g noch eine zweite Tabelle berechnet, bei welcher nur eine Wahrscheinlichkeit von 0,916 oder von etwa 11 gegen 1 gefordert wird. Es ist dies ein wesentlicher Fortschritt, indem dabei manche Beobachtungsreihen wenigstens einigermassen verwerthbar werden, die dies bisher nicht waren. Aber die übrigen Mängel haften auch dieser Tabelle in vollem Maasse an, und die naturgemässe Forderung, für jedes vorliegende Beobachtungsmaterial den Grad der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, wird auch dadurch nicht erfüllt.

[8] Sogar die zweite Tabelle von H i r s c h b e r g, welche nur eine Wahrscheinlichkeit von 11 gegen 1 fordert, beginnt erst mit der Zahl 300.

einem Resultat die Bedingungen der Tabelle, wie sie gewöhnlich aufgefasst zu werden pflegen, auch nicht annäherend erfüllt sind, also scheinbar die Wahrscheinlichkeit für Ausschliessung des Zufalls noch bei Weitem nicht 212 gegen 1 erreicht, während in Wirklichkeit diese Wahrscheinlichkeit mehr als 1000 gegen 1 beträgt.

Diese Mängel der Methoden haben wesentlich dazu beigetragen, die Resultate therapeutischer Statistik noch weniger sicher erscheinen zu lassen, als sie in Wirklichkeit sind, und überhaupt die therapeutische Statistik mehr als sie verdiene in Misscredit zu bringen. Und wenn die Aerzte bisher sich nicht entschliessen konnten, die Methoden, wie sie von den Vertretern der medicinischen Statistik dargeboten wurden, auf ihre Beobachtungen anzuwenden und ihre Schlüsse darnach zu regeln, wenn sie oft glaubten, es genüge, alle Sorgfalt auf die genaue klinische Analyse verwendet zu haben, wenn sie die mathematische Analyse nicht nur vernachlässigten, sondern zuweilen sogar geradezu für überflüssig oder trügerisch erklärten, so beruhte dies wohl weniger auf einem Verkennen des hohen Wertes des Wahrscheinlichkeitsrechung oder auf einer unwissenschaftlichen Gleichgültigkeit gegen strenge Methoden, sondern es war gewiss zum Theil die Opposition des einfachen Verstandes gegen zu weit gehende Behauptungen und Forderungen.

Eine feste Begründung der Therapie ist undenkbar ohne therapeutische Statistik; selbst da, wo die Therapie eine sogenannte rationelle wäre, könnte sie der Probe nicht entbehren, welche durch die Erfahrung, durch die Statistik des Erfolgs geliefert wird. Die therapeutische Statistik bedarf aber, wenn sie auf festem Boden stehen soll, nothwendig der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung in strengster Form. Es ist deshalb ein dringendes Bedürfniss, dass Methoden gefunden werden, welche gestatten, mit grösster Sicherheit, als es bisher möglich war, die Bedeutung therapeutischer Erfahrungen zu beurtheilen.

Schon vor längerer Zeit habe ich bei Gelegenheit specieller therapeutischer Untersuchungen Veranlassung gehabt, die Aufgabe der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf therapeutische Statistik einer direkten Untersuchung zu unterziehen. Es haben sich dabei die Fundamentalformeln in relativ einfacher Gestalt ergeben, ohne dass bei der Ableitung eine Vernachlässigung unbequemer Glieder oder die Annahme von Voraussetzung, die nur approximativ oder nur für grosse Zahlen gültig Seite 942
wären, nothwendig geworden wäre. Die Formeln sind deshalb bei kleinen Zahlen eben so genau gültig wie bei grossen. Auch ist es mir gelungen, aus den Fundamentalformeln andere Formeln abzuleiten, welche für die praktische Anwendung kaum irgend welche mathematische Kenntnisse voraussetzen, dabei aber geeignet sind, die alltäglich vorkommenden Fragen der therapeutischen Statistik mit jedem nur wünschbaren Grade der Genauigkeit zu lösen. Während die Anwendung dieser Formeln auch für den Nicht-Mathematiker ohne Schwierigkeit ist, lässt sich die vollständige Ableitung derselben in einfacher und verständlicher Weise nur geben unter theilweiser Anwendung der höheren Analysis. Ich habe im Folgenden Alles, was besondere mathematische Kenntnisse voraussetzt, in die Anmerkungen verwiesen. Die wesentlichen

Erörterungen, die im eigentlichen Text enthalten sind, werden für jeden verständlich sein, der mit den Anfangsgründen der Mathematik und der Wahrscheinlichkeit bekannt ist. Zur Orientirung über die elementaren Sätze der Wahrscheinlichkeit ist trotz einzelner Missverständnisse, die bei der Anwendung unterlaufen, für den Arzt die Arbeit von Hirschberg zu empfehlen, ausserdem das ältere Werk von Lacroix[9], weches noch immer die beste elementare Darstellung der Wahrscheinlichkeit ist; endlich sind die Grundzüge der Wahrscheinlichkeit vortrefflich dargestellt in dem Werke von Hagen[10], welches auch eine besonders empfehlenswerthe Darlegung der Methode der kleinsten Quadrate enthält. Die eigentlichen fundamentalen Arbeiten von Laplace, Gauss, Poisson, auf welche Jeder recurriren wird, der selbständig in diesem Gebiete arbeiten will, sind nur für den zugänglich, welcher mit der höheren Analysis vertraut ist. — Wer sich gar nicht auf mathematische Erörterungen einlassen will, kann dieselben einfach überschlagen und die Formeln I. und II. auf Seite 946, deren Anwendung aus den Beispielen sich ergibt, ohne Weiteres benutzen.

Nehmen wir an, es seien bei einer bestimmten Krankheit zweierlei verschiedene Behandlungsweisen angewendet worden; bei der ersten Behandlungsweise seien a Todesfälle vorgekommen und b Genesungen, bei der zweiten Behandlungsweise p Todesfälle und q Genesungen. Es sei bei der zweiten Behandlungsweise das Mortalitätsverhältniss günstiger gewesen : es sei also $\frac{p}{p+q}$ kleiner als $\frac{a}{a+b}$. Bevor wir untersuchen können, was die Ursache des günstigen Mortalitätsverhältnisses bei der zweiten Reihe der Fälle war, ist die Frage zu erledigen, ob überhaupt dieses günstigere Verhältniss eine Seite 943 Bedeutung habe, ob es nicht vielleicht einfach auf Zufall beruhe. Diese Frage, aber auch nur diese, vermag die Wahrscheinlichkeitsrechung in exacter Weise zu beantworten, indem sie angibt, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass wirklich bei der zweiten Reihe von Beobachtungen die constanten Bedingungen günstiger waren, und wie gross die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist, dass die constanten Bedingungen nicht günstiger waren. Die Vergleichung dieser beiden Grössen ist dann maassgebend für unser Urtheil.

Wir können diese und die zahlreichen analogen Aufgaben der therapeutischen Statistik auf ein Schema bringen, welches dem in der Wahrscheinlichkeitsrechung seit lange gebräuchlichen entspricht.

Denken wir uns zwei Urnen, deren jede eine sehr grosse Zahl theils schwarzer theils weisser Kugeln in beliebigem unbekanntem Verhältniss enthält. Wir ziehen zunächst aus der ersten Urne einzelne Kugeln (die wir jedesmal wieder hineinwerfen und mit den übrigen mischen); es seien im Ganzen gezogen worden a schwarze und b weisse. Dann ziehen wir ebenso aus der zweiten Urne und erhalten dabei p schwarze und q weisse. Es sei wieder $\frac{p}{p+q}$ kleiner als $\frac{a}{a+b}$. Nun entsteht die Frage: Beruht die relativ geringere Zahl der erhaltenen schwarzen Kugeln im zweiten Falle darauf, dass in der zweiten Urne verhältnissmässig weniger schwarze Kugeln enthalten waren? oder beruht es auf Zufall? Oder genauer: Wie gross ist nach dem Resultat der beiden Ziehungen die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zur

[9] S. F. Lacroix, Traité élémentaire due calcul des probabilités. 4. édit. Paris 1864.

[10] G. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. 2. Aufl. Berlin 1867

Gesammtzahl der Kugeln in der zweiten Urne kleiner ist als in der ersten? Und wie gross ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zur Gesammtzahl der Kugeln in der zweiten Urne gleich dem in der ersten oder grösser als dieses ist?

Es ist g e w i s s, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln in der zweiten Urne entweder kleiner oder gleich oder grösser ist als in der ersten Urne. Setzen wir die Gewissheit $= 1$ und bezeichnen mit P den Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass in der zweiten Urne das Verhältniss der schwarzen Kugeln kleiner ist, so ist $1 - P$ die Wahrscheinlichkeit, dass in der zweiten Urne dieses Verhältniss gleich oder grösser ist als in der ersten.

Es handelt sich nun darum, einerseits alle gleich möglichen Fälle zusammenzufassen, welche der Wahrscheinlichkeit P entsprechen, und anderseits alle gleich möglichen Fälle, welche der Wahrscheinlichkeit $1 - P$ entsprechen.

Es seien in jeder von beiden Urnen sehr viele, event. auch unendlich viele Kugeln vorhanden. In der ersten Urne kommen auf je n Kugeln s schwarze und $n - s$ weisse. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine schwarze Kugel zu treffen, $= \frac{s}{n}$, Seite 944
die Wahrscheinlichkeit beim ersten Zug eine weisse zu treffen, $= \frac{n-s}{n}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei a Zügen nur schwarze zu ziehen, ist $= \left(\frac{s}{n}\right)^a$, die Wahrscheinlichkeit, bei b Zügen nur weisse zu ziehen, ist $= \left(\frac{n-s}{n}\right)^b$. Die Wahrscheinlichkeit, zuerst der Reihe nach a schwarze und dann der Reihe nach b weisse zu ziehen, ist $\left(\frac{s}{n}\right)^a \cdot \left(\frac{n-s}{n}\right)^b$. Und die Wahrscheinlichkeit, bei $a + b$ Zügen in beliebiger Reihenfolge im Ganzen a schwarze und b weisse zu ziehen, ist

$$= \frac{(a+b)!}{a!\,b!} \left(\frac{s}{n}\right)^a \cdot \left(\frac{n-s}{n}\right)^b$$

Dabei bezeichnet $a!$ die sogenannte Facultät von a, nämlich das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a$. Ebenso ist $(a+b)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (a+b)$.

In der zweiten Urne sei die Zahl der schwarzen, die unter je n Kugeln vorhanden sind, gleich t. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, aus der ersten Urne bei $a + b$ Zügen in beliebiger Reihenfolge im Ganzen a schwarze und b weisse zu ziehen und nachher aus der zweiten Urne bei $p + q$ Zügen in beliebiger Reihenfolge im Ganzen p schwarze und q weisse zu ziehen,

$$= \frac{(a+b)!\,(p+q)!}{a!\,b!\,p!\,q!} \left(\frac{s}{n}\right)^a \cdot \left(\frac{n-s}{n}\right)^b \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^p \cdot \left(\frac{n-t}{n}\right)^q$$

Die Grössen s und t sind unbekannt. In Betreff ihres Verhaltens zu einander kommen für uns zwei Möglichkeiten in Betracht, die wir nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu vergleichen haben. Es sind dies die beiden folgenden Hypothesen :

E r s t e H y p o t h e s e: t ist kleiner als s. Diese Hypothese entspricht der Wahrscheinlichkeit P, dass in der zweiten Urne relativ weniger schwarze Kugeln sich finden.

Z w e i t e H y p o t h e s e: t ist gleich oder grösser als s. Diese Hypothese entspricht der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit $1 - P$.

Wenn von den Grössen a, b, p, q keine gleich Null ist, so muss der Werth sowohl von s als von t zwischen 1 und $n-1$ liegen, und zwar wäre sowohl für s als für t jeder zwischen diesen Grenzen liegende Werth möglich. Wir machen nun die Voraussetzung, dass vor Beginn der Ziehungen kein Grund vorhanden gewesen sei, irgend ein bestimmtes Verhältniss der schwarzen Kugeln für wahrscheinlicher zu halten als irgend ein anderes, dass also a priori die Annahme $s = 1$ oder $s = 2$ die gleiche Wahrscheinlichkeit gehabt habe, wie $s = m$ oder $s = m+1$ oder $s = n-2$ oder $s = n-1$. Ebenso für t. Wäre, was in besonderen Fällen wohl vorkommen kann, diese Voraussetzung nicht erfüllt, so müsste die a priori bestehende Verschiedenheit in der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Verhältnisse in Rechnung gesetzt werden (Anmerkung 1). Seite 945

Wir haben nun sowohl für s als auch für t alle zwischen 1 und $n-1$ liegenden Zahlen zu setzen und bei jeder dieser Möglichkeiten sowohl für die erste als für die zweite Hypothese die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolgs zu untersuchen. Wäre z. B. $s = m$, so würden für die erste Hypothese alle Werthe von t in Betracht kommen, welche kleiner sind als m, für die zweite alle Werthe von t, welche gleich oder grösser sind als m. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{(a+b)!\,(p+q)!}{a!\,b!\,p!\,q!\,n^{a+b+p+q}} = Q$$

Für $s = m$ ist die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges bei der ersten Hypothese

$$= Q \cdot m^a (n-m)^b \left\{(m-1)^p (n-m+1)^q + (m-2)^p (n-m+2)^q + \cdots \right. \\ \left. + 1^p (n-1)^q \right\},$$

und bei der zweiten Hypothese

$$= Q \cdot m^a (n-m)^b \left\{m^p (n-m)^q + (m+1)^p (n-m-1)^q \right. \\ \left. + (m+2)^p (n-m-2)^q + \cdots + (n-1)^p 1^q \right\}.$$

Die eingeklammerten Summen können unter Anwendung des gewöhnlichen Summenzeichens bezeichnet werden als

$$\sum_{t=1}^{t=m-1} t^p (n-t)^q \text{ und } \sum_{t=m}^{t=n-1} t^p (n-t)^q$$

Wir setzen nun der Reihe nach für s alle Zahlen von 1 bis $n-1$ und bestimmen die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolgs für jede der beiden Hypothesen. Da es uns zunächst nur auf die relative Wahrscheinlichkeit ankommt, so können wir den allen Ausdrücken gemeinschaftlichen Faktor Q weglassen. Wir erhalten dann folgende Werthe für die relative Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolgs:

	für die erste Hypothese	für die zweite Hypothese
für $s = 1$	$1^a \cdot (n-1)^b \cdot 0^p \cdot n^q = 0$	$1^a \cdot (n-1)^b \cdot \sum\limits_{1}^{n-1} t^p (n-t)^q$
für $s = 2$	$2^a \cdot (n-2)^b \cdot 1^p \cdot (n-1)^q$	$2^a \cdot (n-2)^b \cdot \sum\limits_{t=2}^{n-1} t^p (n-t)^q$
für $s = 3$	$3^a \cdot (n-3)^b \cdot \sum\limits_{t=1}^{2} t^p \cdot (n-t)^q$	$3^a \cdot (n-3)^b \cdot \sum\limits_{t=3}^{n-1} t^p (n-t)^q$
für $s = m$	$m^a \cdot (n-m)^b \cdot \sum\limits_{t=1}^{m-1} t^p \cdot (n-t)^q$	$m^a \cdot (n-m)^b \cdot \sum\limits_{t=m}^{n-1} t^p (n-t)^q$
für alle Werthe zusammen	$\sum\limits_{s=1}^{n-1} \left\{ s^a \cdot (n-s)^b \cdot \sum\limits_{t=1}^{s-1} t^p \cdot (n-t)^q \right\}$	$\sum\limits_{s=1}^{n-1} \left\{ s^a \cdot (n-s)^b \cdot \sum\limits_{t=s}^{n-1} t^p (n-t)^q \right\}$ Seite 946

Die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese verhält sich zur Wahrscheinlichkeit der zweiten, wie die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolgs bei Voraussetzung der ersten zu der Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolgs bei Voraussetzung der zweiten. Da wir die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese mit P, die der zweiten mit $1 - P$ bezeichnen, so haben wir:

(A)
$$\frac{P}{1-P} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n-1} \sum\limits_{t=1}^{s-1} s^a (n-s)^b \cdot t^p (n-t)^q}{\sum\limits_{s=1}^{n-1} \sum\limits_{t=s}^{n-1} s^a (n-s)^b \cdot t^p (n-t)^q}.$$

In analoger Weise erhält man, indem man zunächst für t die verschiedenen möglichen Werthe einsetzt, den folgenden Ausdruck, der dem vorhergehenden nothwendig gleich sein muss.

(B)
$$\frac{P}{1-P} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n-1} \sum\limits_{s=t+1}^{n-1} t^p (n-t)^q \cdot s^a (n-s)^b}{\sum\limits_{t=1}^{n-1} \sum\limits_{s=1}^{t} t^p (n-t)^q \cdot s^a (n-s)^b}.$$

Mit der Gewinnung dieses Resultats ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, gelöst. Es bleibt nur noch übrig, mittelst rein mathematischer Manipulationen die erhaltenen Ausdrücke so umzuformen, dass sie für die Rechnung möglichst bequem werden. Man erhät durch solche Umformungen eine grosse Zahl verschiedener Formeln, die alle bei der Berechnung genau gleiche Resultate ergeben, von denen aber einige mehr, andere weniger mühsam auszurechnen sind (Anmerkung 2). Ich führe hier die beiden Formeln an, welche unter allen die bequemsten sind, und die wir deshalb ausschliesslich benutzen werden.

$$\text{I.}\quad P = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p+1)!\,(b+q+1)!}{a!\,(b+1)!\,(p+1)!\,q!\,(a+b+p+q+2)!} \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{a \cdot q}{(b+2)\cdot(p+2)} + \frac{a\,(a-1)\cdot q\,(q-1)}{(b+2)\,(b+3)\cdot(p+2)\,(p+3)} + \frac{a\,(a-1)\,(a-2)\cdot q\,(q-1)\,(q-2)}{(b+2)\,(b+3)\,(b+4)\cdot(p+2)\,(p+3)\,(p+4)} +++\right\}$$

$$\text{II.}\quad 1 - P = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p+1)!\,(b+q+1)!}{(a+1)!\,b!\,p!\,(q+1)!\,(a+b+p+q+2)!} \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{b \cdot p}{(a+2)\cdot(q+2)} + \frac{b\,(b-1)\cdot p\,(p-1)}{(a+2)\,(a+3)\cdot(q+2)\,(q+3)} + \frac{b\,(b-1)\,(b-2)\cdot p\,(p-1)\,(p-2)}{(a+2)\,(a+3)\,(a+4)\cdot(q+2)\,(q+3)\,(q+4)} +++\right\}$$

Es braucht von diesen Formeln immer nur eine angewendet zu werden, indem man entweder P aus Formel I. oder $1-P$ aus Formel II. berechnet; meist wird das letztere Seite 947
das bequemere Verfahren sein. Es müssen immer die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $\frac{p}{p+q}$ kleiner als $\frac{a}{a+b}$ ist.

Bei der Ableitung der Formeln ist die sonst gewöhnliche Voraussetzung, dass die Zahl der Beobachtungen eine sehr grosse sei, nicht gemacht worden[11]. Darum ist auch — und dies ist der wesentliche Vorzug dieser Formeln — die Gültigkeit derselben nicht abhängig von der Zahl der vorliegenden Beobachtungen. Die Resultate sind fast eben so genau, wenn es sich um kleine Zahlen, wie wenn es sich um Tausende oder Millionen handelt. Der Grad der Genauigkeit geht im einzelnen Falle gerade so weit, als man die Rechnung durchführen will.

Um die Anwendung der Formeln zu zeigen, beginnen wir mit einem aus sehr kleinen Zahlen bestehenden Beispiel.

1. Es seien aus einer Urne, von der wir nur wissen, dass sie sehr zahlreiche theils schwarze, theis weisse Kugeln enthält, 3 Kugeln gezogen worden, und es seien davon 2 schwarz und eine weiss. Aus einer zweiten Urne seien 4 Kugeln gezogen worden, davon sei eine schwarz, und 3 seien weiss. Die Frage ist: wie gross ist nach dem Resultat dieser Ziehungen die Wahrscheinlichkeit P für die Annahme, dass in der zweiten Urne verhältnissmässig weniger schwarze Kugeln enthalten seien als in der ersten? Wir haben $a = 2$, $b = 1$, $p = 1$, $q = 3$, und erhalten nach Formel II.:

$$1 - P = \frac{4!\,5!\,4!\,5!}{3!\,1!\,1!\,4!\,9!}\left\{1 + \frac{1\cdot 1}{5\cdot 4}\right\}$$

[11] Die Zahl n wird freilich als sehr gross resp. unendlich vorausgesetzt; aber es ist dies genau der Wirklichkeit entsprechend. Denn dieses n entspricht der Zahl der Beobachtungen, welche in Zukunft möglicherweise gemacht werden könnten; von der Zahl der wirklich gemachten Beobachtungen ist es gänzlich unabhängig.

Die eingeklammerte Reihe beschränkt sich auf 2 Glieder, weil für alle folgenden der Zähler des Bruches = 0 wird. Es bezeichnet 4 die Facultät von 4, nämlich das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; ebenso ist 5! die Bezeichnung für $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; $1! = 1$, u. s. w. Die Zahlen sind so klein, dass die Rechnung ohne jedes weitere Hülfsmittel ausgeführt werden kann. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - P &= 0,1666666\ldots, \\ \text{also } P &= 0,8333333\ldots, \quad \frac{P}{1-P} = 5. \end{aligned}$$

Aus Formel I. erhält man in gleicher Weise:

$$P = \frac{4!\,5!\,4!\,5!}{2!\,2!\,2!\,3!\,9!}\left\{1 + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2}{3 \cdot 4 \times 3 \cdot 4}\right\}$$
$$P = 0,8333333\ldots.$$

Man kann demnach 5 gegen 1 wetten, dass in der zweiten Urne das Verhältniss der schwarzen Kugeln geringer sei als in der ersten. Wären von gleichartigen Krankheitsfällen bei einer Behandlungsmethode von 3 Kranken 2 gestorben, bei einer anderen Behandlungsmethode von 4 Kranken nur 1, so wäre schon 5 gegen 1 zu wetten, dass dies nicht Zufall sei, sondern bei der zweiten Reihe von Fällen die Bedingungen günstigere waren. Es entspricht dieses Resultat ganz der unbefangenen Abwägung, die ebenfalls in dem Ergebniss der zweiten Reihe im Vergleich zu dem der ersten eine Aufforderung finden würde, bis auf Weiteres mit der zweiten Behandlungsweise fortzufahren. Seite 948

In dem gewählten Beispiel ist trotz der kleinen Zahl von Beobachungen die erhaltene Wahrscheinlichkeit doch nicht ganz unbedeutend, weil die Differenz $2/3 - 1/4$ eine sehr grosse ist. Wäre diese Differenz kleiner, etwa $2/3 - 2/4$, indem wir annehmen, es seien bei der ersten Ziehung unter 3 Kugeln 2 schwarze, bei der zweiten unter 4 Kugeln 2 schwarze gewesen, so erhalten wir, indem wir $a = 2$, $b = 1$, $p = 2$, $q = 2$ setzen, $1 - P = 5/14$ und $P = 9/14$. Man könnte also noch nicht 2 gegen 1 wetten, dass in der zweiten Urne verhältnismässig weniger schwarze Kugeln enthalten seien.

Sobald die Zahlen etwas grösser sind, ist die directe Berechnung der Facultäten $a!$, $b!$ u. s. w. nicht mehr ausführbar. Die Facultät von 100 ist z. B. schon eine Zahl von 158 Stellen, die mit den Ziffern 93326... beginnt. Solche Zahlen wären, wenn man sie direct benutzen wollte, für die Rechnung kaum zu handhaben. Aber wir bedürfen in der Wahrscheinlichkeitsrechung meist nicht dieser Facultäten selbst, sondern nur ihres Verhältnisses; und dieses wird genau erhalten aus der Differenz ihrer Logarithmen. In der am Ende dieses Heftes befindlichen Tabelle[12] sind für alle Zahlen von 0 bis 1200

[12] Die Tabelle ist ein Auszug aus der grösseren bis auf 18 Decimalstellen berechneten Tabelle von C. F. Degen, Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium Enneas. Havniae 1824.

die Logarithmen ihrer Facultäten [A. d. Hrsg.: zur Basis 10] aufgeführt, und es kann vermittelst dieser Tabelle die Berechnung des aus Facultäten bestehenden Factors mit der grössten Bequemlichkeit ausgeführt werden, so weit die dabei vorkommenden Werthe für $a+b+p+q+2$ nicht über 1200 hinausgehen. Nehmen wir wieder ein fingiertes Beispiel.

2. Es seien bei einer Behandlungsweise von 15 Kranken 6 gestorben, bei einer anderen Behandlungsweise von 32 gleichwerthigen Kranken 7 gestorben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das günstigere Mortalitätsverhältniss im zweiten Falle nicht zufällig ist?

Ich gebe, um die Anordnung der Rechnung im Einzelnen zu zeigen, die Ausrechnung des Beispiels in vollster Ausführlichkeit. Wir haben $a = 6$, $b = 9$, $p = 7$, $q = 25$, und erhalten nach Formel II.:

Seite 949

$$1 - P = \frac{16!\,33!\,14!\,35!}{7!\,9!\,7!\,26!\,49!}\left\{1 + \frac{7\times 9}{27\times 8} + \frac{7\cdot 6\times 9\cdot 8}{27\cdot 28\times 8\cdot 9} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\times 9\cdot 8\cdot 7}{27\cdot 28\cdot 29\times 8\cdot 9\cdot 10} + {+}{+}\right\}$$

Wir berechnen zunächst mit Hülfe der Tabelle am Ende des Heftes den aus Facultäten bestehenden Factor, den wir mit F bezeichnen. [A. d. Hrsg.: Im gesamten Artikel bezeichnet das Symbol “log” den Logarithmus zur Basis 10.]

$$\begin{array}{rcl} \log(16!) &=& 13,32062 \\ \log(33!) &=& 36,93869 \\ \log(14!) &=& 10,94041 \\ \log(35!) &=& 40,01423 \\ \hline \log \text{Zähler} &=& 101,21395 \\ -\log \text{Nenner} &=& 102,35434 \\ \hline \log F &=& 0,85961 - 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log(\ 7!) &=& 3,70243 \\ \log(\ 9!) &=& 5,55976 \\ \log(\ 7!) &=& 3,70243 \\ \log(26!) &=& 26,60562 \\ \log(49!) &=& 62,78410 \\ \hline \log \text{Nenner} &=& 102,35434 \end{array}$$

Die Berechnung des anderen aus einer endlichen Reihe bestehenden Factors ist am einfachsten mit gewöhnlichen Logarithmen [A. d. Hrsg.: verwendet werden Logarithmen zur Basis 10] auszuführen, indem man berücksichtigt, dass jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden sich ergibt durch Multiplication mit den noch hinzugekommenden Factoren. Wir bezeichnen die einzelnen Glieder der Reihe mit $1, y_0, y_1, y_2$ u. s. w. und die Summe der Reihe mit S, so dass also

$$\begin{aligned} S &= 1 + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + {+}{+} \\ \text{und } 1 - P &= F \times S. \end{aligned}$$

Die Rechnung kann etwa in folgender Weise gemacht werden:

$$
\begin{array}{rcl}
\log 7 & = & 0,84510 \\
\log 9 & = & 0,95424 \\
\hline
 & & 1,79934 \\
 & - & 2,33445 \\
\hline
\log y_0 & = & 0,45489 - 1 \\
\log 6 & = & 0,77815 \\
\log 8 & = & 0,90309 \\
\hline
 & & 1,14613 \\
 & - & 2,40140 \\
\hline
\log y_1 & = & 0,74473 - 2 \\
\log 5 & = & 0,69897 \\
\log 7 & = & 0,84510 \\
\hline
 & & 0,28880 \\
 & - & 2,46240 \\
\hline
\log y_2 & = & 0,82640 - 3 \\
\log 4 & = & 0,6021 \\
\log 6 & = & 0,7782 \\
\hline
 & & 0,2067 \quad - 1 \\
 & - & 2,5185 \\
\hline
\log y_3 & = & 0,6882 \quad - 4 \\
\log 3 & = & 0,477 \\
\log 5 & = & 0,699 \\
\hline
 & & 0,864 \quad - 3 \\
 & - & 2,570 \\
\hline
\log y_4 & = & 0,294 \quad - 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log 27 & = & 1,43136 \\
\log \ 8 & = & 0,90309 \\
\hline
 & & 2,33445 \\
\\
\log 28 & = & 1,44716 \\
\log \ 9 & = & 0,95424 \\
\hline
 & & 2,40140 \\
\\
\log 29 & = & 1,46240 \\
\log 10 & = & 1,00000 \\
\hline
 & & 2,46240 \\
\\
\log 30 & = & 1,4771 \\
\log 11 & = & 1,0414 \\
\hline
 & & 2,5185 \\
\\
\log 31 & = & 1,491 \\
\log 12 & = & 1,079 \\
\hline
 & & 2,570
\end{array}
$$

Wenn man den Werth für P nur auf 5 Decimalstellen sicher verlangt, so kann man hier die Reihe [A. d. Hrsg.: nach 6 Gliedern] abbrechen. Wollte man sich, was ja praktisch gewöhnlich ganz ausreichend ist, mit einem geringeren Grade der Genauigkeit begnügen, so hätte man Seite 950 schon früher mit der Rechnung aufhören und für die Logarithmen noch weniger Stellen nehmen dürfen. Wem die Rechnung mit Complementen geläufiger ist, kann die Form noch mehr vereinfachen. Die Zusammenstellung der Glieder der Reihe ergibt:

$$
\begin{aligned}
\log y_0 &= 0,46489 - 1 \\
\log y_1 &= 0,74473 - 2 \\
\log y_2 &= 0,82640 - 3 \\
\log y_3 &= 0,6882 \quad - 4 \\
\log y_4 &= 0,294 \quad\; - 5
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
& \quad\; 1,00000 \\
y_0 &= 0,29167 \\
y_1 &= 0,05556 \\
y_2 &= 0,00671 \\
y_3 &= 0,00049 \\
y_4 &= 0,00002 \\
\hline
S &= 1,35445
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log S &= 0,13176 \\
\log F &= 0,85961 - 2 \\
\hline
\log(1-P) &= 0,99137 - 2 \\
1 - P &= 0,09803 \\
P &= 0,90197 \\
\frac{P}{1-P} &= 9,2
\end{aligned}
$$

Die Berechnung von P nach Formel I., die bei diesem Beispiel nahezu ebenso leicht ausführbar ist, ergibt genau das gleiche Resultat.

Man kann demnach etwas mehr als 9 gegen 1 wetten, dass die Differenz der Resultate bei beiden Beobachtungsreihen nicht zufällig war, dass also, falls alle anderen constanten Ursachen, von denen die Differenz herrühren könnte, sich ausschliessen lassen, dieselbe auf die Verschiedenheit der Behandlung zu beziehen ist.

Wäre die Differenz der Beobachtungsresultate grösser gewesen, so hätte man trotz der kleinen Zahlen eine viel grössere Wahrscheinlichkeit für die Ausschliessung des Zufalls erhalten. Nehmen wir an, es wären bei dem gleichen Beispiel von den 32 Kranken der zweiten Reihe nur 2 gestorben, so ergäbe sich $P = 0,9968476$, d. h. man könnte 316 gegen 1 wetten, dass die Differenz der Resultate nicht auf Zufall beruhe.

3. Um zu zeigen, wie gross selbst bei kleinen Zahlen die Wahrscheinlichkeit für Ausschliessung des Zufalls werden kann, wenn die Differenzen der Beobachtungsresultate sehr gross sind, nehmen wir ein schon früher angedeutetes Beispiel, zu dessen Berechnung die bisher gebräuchlichen Formeln gänzlich unzureichend waren. Es seien von einer gewissen Zahl von Wechselfieberkranken ohne jede Auswahl 12 mit ausreichenden Dosen Chinin und 12 andere rein exspectativ behandelt worden. Bis zum dritten Tage der Behandlung seien von den mit Chinin behandelten 10 fieberfrei geworden; von den exspectativ behandelten sei nur bei 2 Fällen das Fieber ausgeblieben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Chinin eine das Fieber coupierende Wirkung ausübt?

Wir setzen $a = 10$, $b = 2$, $p = 2$, $q = 10$, und erhalten $P = 0,9993987$. Wir können 1666 gegen 1 wetten, dass die Verschiedenheit der Resultate nicht zufällig ist.

Seite 951

4. In Nr. 1 der Berliner klinischen Wochenschrift von diesem Jahre (1876) machte Stricker aus der Traube'schen Klinik eine Mittheilung über die Wirkung der Salicylsäure bei acutem Gelenkrheumatismus. Er berichtete, dass sämmtliche frische Fälle, welche der Behandlung mit Salicylsäure unterworfen wurden, spätestens nach Ablauf von 48 Stunden, meist aber weit früher, von allem Fieber und allen localen Erscheinungen befreit waren. Da wir Aerzte daran gewöhnt sind, dass von Zeit zu Zeit gewisse Mittel gegen gewisse Krankheiten als unfehlbar angepriesen werden, meist aber bei genauerer Untersuchung sich als unwirksam oder wenig wirksam erweisen, so war es nicht zu verwundern, wenn anfangs diese Mittheilung bei manchem Arzt einer entschiedenen Skepsis begegnete, besonders da bisher nur über 14 Fälle berichtet werden konnte. Der Verfasser selbst sagt, er müsse leider bekennen, dass sein statistisches Material "nur aus 14 Fällen zusammengesetzt, für den also Nichts werth ist, der eine maassgebende Statistik nur aus Tausenden von Fällen herleitet.". — Es ist dies ja in der That die gewöhnliche Auffassung in der medicinischen Statistik. Aber der einfache Verstand wird gewiss dem Verfasser Recht geben, wenn er dem Umstande, dass alle 14 Fälle ohne Ausnahme so ungewöhnlich günstig verliefen, eine sehr grosse Beweiskraft zuschrieb. — Ich habe damals auf jene Mittheilung meine Formel angewendet und durch eine höchst einfache Rechnung mich überzeugt, dass, die Richtigkeit der Beobachtungen und namentlich der Diagnosen als selbstverständlich vorausgesetzt, jene 14 Fälle vollkommen ausreichend sind, um das Vorhandensein einer ungewöhnlichen Einwirkung, welche nur bei diesen Fällen stattgefunden und ihren günstigen Verlauf verursacht hat, zu beweisen, und zwar mit einem Grade der Wahrscheinlichkeit, welcher von der absoluten Sicherheit nicht wesentlich verschieden ist. — Auch haben gleich die ersten Versuche, welche ich selbst an Kranken anstellte, überraschend günstige Resultate ergeben; und seitdem haben bekanntlich die Angaben von Stricker in den wesentlichen Punkten die mannichfachste Bestätigung gefunden.

Für die Ausführung der Rechnung ist es erforderlich, eine Reihe von Beobachtungen mit indifferenter Behandlung vergleichen zu können. Es kann ja, wenn auch freilich selten, vorkommen, dass auch ein einzelner exspectativ behandelter Fall einen eben so günstigen Verlauf nimmt. Um die Resultate der exspectativen Behandlung sicher nicht zu ungünstig zu beurtheilen, wollen wir annehmen, es finde dabei ein so günstiger Verlauf bei durchschnittlich 20 Procent der Fälle statt. Würde man nun etwa zur Vergleichung 10 frühere Fälle benutzen, von denen 2 eben so günstig verlaufen wären, so hätte man $a = 8$, $b = 2$, $p = 0$, $q = 14$, oder auch, was genau das gleiche Resultat gibt, $a = 14$, $b = 0$, $p = 2$, $q = 8$. Nach Formel II. erhält man:

$$1 - P = \frac{11!\,15!\,9!\,17!}{15!\,0!\,2!\,9!\,26!} = \frac{11!\,17!}{2!\,26!}$$

Da b resp. $p = 0$, so reduciert sich die Reihe auf das erste Gleid $= 1$. Zu beachten ist, dass $0! = 1$. Die Ausrechnung mit Hülfe der Tabelle ergibt:

Seite 952

$$
\begin{array}{rcr}
\log(11!) & = & 7,60116 \\
\log(17!) & = & 14,55107 \\
\hline
 & & 22,15223 \\
 & & 26,90665 \\
\hline
\log(1-P) & = & 0,24558-5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
\log(\ 2!) & = & 0,30103 \\
\log(26!) & = & 26,60562 \\
\hline
 & & 26,90665
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1-P &= 0,000017603 \\
P &= 0,999982397
\end{aligned}
$$

Man könnte mehr als 56000 gegen 1 wetten, dass der auffallend günstigere Verlauf jeder 14 Fälle nicht zufällig war.

Hätte man zur Vergleichung 100 indifferent behandelte Fälle benutzt, von denen 20 den kurzen günstigen Verlauf genommen hätten, so würde man mehr als 800 Millionen gegen 1 wetten können, dass das Resultat bei jenen 14 Fällen nicht das Product des Zufalls sei.

Wären zur Vergleichung 1000 Fälle vorhanden, von denen 200 jenen günstigen Verlauf genommen hätten, so beliefe sich die Wahrscheinlichkeit auf mehr als 19000 Millionen gegen 1.

Wenn die Verschiedenheit der Beobachtungsresultate weniger bedeutsam ist, so ist auch die Wahrscheinlichkeit für Ausschliessung des Zufalls eine geringere, selbst wenn die Zahl der Beobachtungen beträchtlich grösser ist.

5. Auf meiner Abtheilung des Baseler Spitals waren in den Jahren 1867 bis 1871 von 230 Kranken mit acuter croupöser Pneumonie, die, so weit es erforderlich war, nach antipyretischer Methode behandelt wurden, 38 gestorben; die Mortalität hatte somit 16,5 Procent betragen. In früheren Jahren, bevor die antipyretische Behandlung eingeführt war, waren auf der gleichen Abtheilung von 692 Kranken 175 gestorben; die Mortalität hatte 25,3 Procent betragen. Durch genaue klinische Analyse war festgestellt, dass die beiden Reihen von Beobachtungen in jeder anderen Beziehung mit einander vergleichbar waren (s. Fismer, Deutsches Archiv für klin. Med. Bd. XI. S. 391 ff.). Es bleibt also nur noch die Frage übrig: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verschiedenheit der Resultate nicht zufällig war:

Wir haben $a = 175$, $b = 517$, $p = 38$, $q = 192$. Die Berechnung nach Formel II. ergibt $1 - P = 0,0028651$, also $P = 0,9971349$. Die Wahrscheinlichkeit für Ausschliessung des Zufalls beträgt 348 gegen 1.

6. Endlich wollen wir noch ein Beispiel berechnen, welches zugleich geeignet ist zu zeigen, in welch auffallender Weise bisher zuweilen von Vertretern der medicinischen Statistik die Bedeutung der von ihnen angewendeten Formeln missverstanden worden

ist. In der Darstellung der mathematischen Grundlagen der medicinischen Statistik von Hirschberg wird zur Erläuterung des Satzes, dass auf kleine Schwankungen der statistischen Verhältnisszahlen kein Gewicht zu legen ist, folgendes Beispiel angeführt: "Wenn man in einer Reihe von 300 Fällen einer Krankheit, z. B. des Ileotyphus, eine Mortalität von 22 Procent, in einer zweiten Reihe von 300 Fällen des Ileotyphus eine Mortalität von 16 Procent gefunden, so kann der wahre Werth der Mortalität in beiden Seite 953
Reihen derselbe sein, ja es ist dies in hohem Grade wahrscheinlich." Eine solche Behauptung entspricht nun in der That keineswegs der gewöhnlichen Anschauungsweise des praktischen Arztes, der doch gewiss das Resultat der zweiten Reihe für wesentlich günstiger erklären wird; sie entspricht aber auch nicht dem Ergebniss einer unbefangenen Ueberlegung. Eine solche wird freilich zugeben, dass die Verschiedenheit der therapeutischen Resultate in beiden Reihen nicht gross genug ist, um bei nicht sehr grossen Zahlen daraus sichere Schlüsse zu ziehen; die Möglichkeit, dass diese Verschiedenheit nur zufällig und bedeutungslos sein könne, wird nicht bezweifelt werden; dass aber dies wahrscheinlich sei, wird dem einfachen Verstande gewiss nicht einleuchten. Nun ergibt sich schon aus den Poisson'schen Formeln, wenn man sie richtig anwendet, für die Annahme, dass jene Verminderung der Mortalität in der zweiten Reihe nicht zufällig sei, sondern auf einer constanten Ursache beruhe, eine Wahrscheinlichkeit von 0,9397; d. h. man kann mehr als 15 gegen 1 wetten, dass jene Verminderung nicht zufällig sei. Die Frage freilich, welche Ursache die Verminderung der Mortalität bewirkt habe, ob eine etwaige Verschiedenheit der Behandlung oder ein Wechsel in dem Charakter der Epidemie oder irgend ein anderer Wechsel der Verhältnisse, ist nicht Sache der mathematischen, sondern der klinischen Analyse. Auch ist ja eine Wahrscheinlichkeit von 15 gegen 1 von absoluter Sicherheit noch weit entfernt; sie ist nicht so gross, wie man sie vielleicht wünschen möchte, wenn man schwere Entschliessungen fassen soll, und namentlich nicht so gross, wie sie die Gavarret'schen Formeln verlangen; aber sie ist doch gewiss nicht bedeutungslos. Es wird wesentlich von anderweitigen Umständen und Erwägungen abhangen können, ob man sie für ausreichend halten will, um darauf hin in Betreff der zukünftigen Behandlung oder dergleichen einen wichtigen Beschluss zu fassen. Nehmen wir beispielsweise an, es sei die erste Reihe von Beobachtungen in einem gewöhnlichen Spital, die andere unter genau gleichen Verhältnissen in einem Barackenlazareth gemacht worden. Es wären dann diese Beobachtungen doch ein nicht zu verachtender Fingerzeig. Wo der Bau der Baracken leicht auszuführen wäre, würde man auf jenes Resultat hin wohl ohne Frage dazu schreiten. Wo dagegen besondere Schwierigkeiten und Inconvenienzen damit verbunden wären und auch zur sorfortigen Entscheidung keine dringende Veranlassung vorläge, würde man wohl vorziehen, vorläufig noch abzuwarten und zu sehen, ob durch weiter fortzusetzende Beobachtungen jene Wahrscheinlichkeit vermehrt oder vermindert werde. — Wir dürfen in allen Fällen mit Sicherheit darauf rechnen, dass das Resultat einer richtig angesetzten Rechnung nicht in Widerspruch stehen wird mit dem Ergebniss einer ohne Rechnung ausgeführten verständigen Ueberlegung. Die Rechnung gibt ein in Zahlen ausgedrücktes Resultat und ist deshalb, wo sie angewendet werden kann, ein unersetzliches Hülfsmittel. Die Bedeutung und das Gewicht dieser Zahlen zu beurtheilen und darnach Beschlüsse zu fassen, fällt wieder der Ueberlegung anheim.

Wenden wir auf das Beispiel unsere genaueren Formeln an, so ergibt sich, indem wir $a = 66$, $b = 234$, $p = 48$, $q = 252$ setzen, $P = 0,96915$; wir haben also für die Ausschliessung des Zufalls eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 31 gegen 1, und das Resultat hat demnach in Wirklichkeit eine noch etwas grössere Bedeutung, als man ihm nach den bei so kleinen Zahlen nur wenig genauen Poisson'schen Formeln zuschreiben würde. Seite 954

Wenn die in den Formeln vorkommenden Facultäten grösser als 1200! sind, so reicht unsere Tabelle zur Berechnung nicht mehr aus. Aber gerade für grosse Zahlen sind die Facultäten leicht nach der Stirling'schen Formel zu berechnen, nach welcher, wenn α eine grosse Zahl

$$\alpha! = \alpha^{\alpha} \cdot e^{-\alpha} \cdot \sqrt{2\pi\alpha}$$

Dabei ist e die Basis der natürlichen Logarithmen und π der Umfang des Kreises für den Durchmesser = 1. Sind alle Zahlen einigermassen gross, so erhält man aus Formel II. den folgenden für die Berechnung mit Logarithmen bequemen Ausdruck:

$$\text{III.}\quad 1 - P = \frac{\left(\frac{a+b+1}{a+1}\right)^{a+1} \cdot \left(\frac{a+b+1}{b}\right)^{b} \cdot \left(\frac{p+q+1}{p}\right)^{p} \cdot \left(\frac{p+q+1}{q+1}\right)^{q+1}}{\left(\frac{a+b+p+q+2}{a+p+1}\right)^{a+p+1} \cdot \left(\frac{a+b+p+q+2}{b+q+1}\right)^{b+q+1}}$$
$$\times \sqrt{\frac{(a+b+1)\cdot(p+q+1)\cdot(a+p+1)\cdot(b+q+1)}{2\pi\cdot(a+1)\cdot b\cdot p\cdot(q+1)\cdot(a+b+p+q+2)}} \left\{1 + \frac{b \cdot p}{(a+2)(q+2)} + ++\right\}$$

[A. d. Hrsg.: Der letzte Faktor in Formel III. ist in Formel II. mit mehr Gliedern angegeben.]

7. Beispiel. Im Baseler Spital sind in den Jahren 1843 bis 1864 bei exspectativer Behandlung von 1718 Kranken mit Abdominaltyphus 469 gestorben. In den Jahren 1866 bis 1874 sind bei antipyretischer Behandlung von 1175 durchschnittlich eben so schwer Kranken nur 130 gestorben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das günstige Mortalitätsverhältniss bei antipyretischer Behandlung nicht auf Zufall beruht. Wir haben $a = 469$, $b = 1249$, $p = 130$, $q = 1045$, und erhalten nach Formel III.:

$$\begin{aligned} & \log(1-P) = 0,7310 - 20 \\ 1 - P &= 0,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00538\ldots \\ P &= 0,99999\,99999\,99999\,99999\,99999\,99462\ldots \end{aligned}$$

Man kann demnach mehr als 1800 Quadrillionen gegen 1 wetten, dass die Verschiedenheit der Resultate nicht zufällig ist.

Je grösser die Zahlen sind, um so eher lassen sich auch die Poisson'schen Formeln zur Berechnung benutzen. Da dieselben aber unser Problem nicht direkt in Angriff nehmen, so müssen sie, um für unsere Zwecke brauchbar zu werden, noch eine kleine Umgestaltung erfahren. Die Resultate der Berechung stimmen mit den nach unseren Formeln erhaltenen im Wesentlichen überein; nur sind sie nothwendig etwas weniger genau. So erhält man z. B. bei der Anwendung auf unsere Typhusstatistik (7. Beispiel) eine noch etwas grössere Wahrscheinlichkeit; bei der Pneumoniestatistik dagegen (5. Beispiel) bleibt die erhaltene Wahrscheinlichkeit um ein Geringes unter der von uns berechneten.

Es seien noch einige Andeutungen über Cautelen und Hülfsmittel angeführt, welche in manchen Fällen die Rechnung erleichtern können. Seite 955

Bei Aufgaben, bei welchen es nöthig ist, eine etwas grössere Zahl von Gliedern zu berechnen, ist es von Bedeutung, um vor Schreib- und Rechenfehlern sicher zu sein, eine bequeme Controlle der Rechnung zu haben. Man kann nun jedes beliebige Glied der Reihe leicht direct berechnen und mit dem bei successiver Rechnung erhaltenen Werthe vergleichen. Bezeichnen wir in Formel II. die Glieder der Reihe mit

$$1, y_0, y_1, y_2, y_3 \dots y_k \dots y_n, \quad \text{so ist}$$

$$y_k = \frac{b(b-1)\dots(b-k) \times p(p-1)\dots(p-k)}{(a+2)(a+3)\dots(a+k+2) \times (q+2)(q+3)\dots(q+k+2)} = \frac{b!\,p!\,(a+1)!\,(q+1)!}{(b-k-1)!\,(p-k-1)!\,(a+k+2)!\,(q+k+2)!}$$

Der letztere Ausdruck lässt sich, falls die einzelnen Zahlen nicht über 1200 hinausgehen, mit Hülfe der Tabelle der Facultäten ohne Mühe berechnen. Stimmt das Ergebnis mit dem bei successiver Rechnung erhaltenen Resultat, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass auch die Logarithmen aller vorhergehenden Glieder richtig berechnet sind.

Wenn die Zahlen gross und die Differenzen der Beobachtungsresultate gering sind, so kann es vorkommen, dass für eine genaue Berechnung von $1 - P$ sehr zahlreiche Glieder der Reihe erforderlich wären und dadurch die Rechnung sehr zeitraubend würde. Für den in praxi nicht seltenen Fall, dass man sich schon mit einer gewissen Annäherung begnügen kann, lässt sich die Summe der Reihe in Formel II. bequem abschätzen durch die folgende Näherungsformel, welche nur die Berechnung von zwei Gliedern erfordert, die dann freilich auf wenigstens 6 Stellen auszudehnen ist:

$$1 + y_0 + y_1 + y_2 + + + = \frac{y_0 + y_0 \cdot y_0 - 2y_1}{y_0 + y_0 \cdot y_1 - 2y_1}.$$

Wenn man die Reihe genau ausgerechnet hat, bietet diese Näherungsformel eine gewisse Controlle der Rechnung.

Endlich sei noch erwähnt, dass unsere Formeln nicht nur auf therapeutische Statistik, sondern auch auf eine grosse Zahl anderer Aufgaben der Wahrscheinlichkeit anwendbar sind.

Seite 956

Anmerkungen.

---

1) Bei der Behandlung von Aufgaben über die sogenannte Wahrscheinlichkeit a posteriori gibt man sich nicht selten der Illusion hin, als gehe man ganz voraussetzungslos an die Beobachtungen heran. In Wirklichkeit ist dies niemals der Fall und kann es naturgemäss nicht sein. Aber die Art der aprioristischen Voraussetzungen ist von wesentlichem Einfluss auf die Resultate. Statt der im Text angenommen Voraussetzung, die bei ähnlichen Aufgaben bisher gewöhnlich stillschweigend gemacht worden ist, wären auch noch andere Annahmen möglich; so z. B. könnte es für gewisse besondere Fälle zutreffen, wenn man voraussetzen würde, es könne in der Urne jede einzelne Kugel eben so gut schwarz wie weiss sein; und dann hätten a priori die verschiedenen Verhältnisse eine ganz ausserordentlich verschiedene Wahrscheinlichkeit; sie würden sich verhalten wie die Binomialcoefficienten.

2) Aus den Gleichungen A und B auf Seite 946 erhält man, und zwar für $n = \infty$ mit mathematischer Strenge, die folgenden vier Fundamentalformeln, in denen zur Abkürzung

$$\frac{(a+b+1)!}{a!\,b!} = \nu \quad \text{und} \quad \frac{(p+q+1)!}{p!\,q!} = \mu \quad \text{gesetzt wird.}$$

$$(1) \qquad P = \nu \cdot \mu \cdot \int_0^1 \int_0^1 x^{a+p+1}(1-x)^b y^p \cdot (1-xy)^q dxdy$$

$$(2) \qquad 1-P = \nu \cdot \mu \cdot \int_0^1 \int_0^1 x^{b+q+1}(1-x)^a y^q \cdot (1-xy)^p dxdy$$

$$(3) \qquad P = \nu \cdot \mu \cdot \int_0^1 \int_0^1 x^{q+p+1}(1-x)^b y^b \cdot (1-xy)^a dxdy$$

$$(4) \qquad 1-P = \nu \cdot \mu \cdot \int_0^1 \int_0^1 x^{a+p+1}(1-x)^q y^a \cdot (1-xy)^b dxdy$$

Die im Text gegebene Ableitung der Formeln A und B ist vorzugsweise für das Verständniss des in höherer Mathematik nich Bewanderten bestimmt. Ich gebe noch in Kürze eine Ableitung der Fundamentalformeln, bei welcher die Form mehr der bei solchen Erörterung gebräuchlichen entspricht.

Es seien aus der ersten Urne a schwarze und b weisse, aus der zweiten p schwarze und q weisse Kugeln gezogen worden, und es sei $\frac{p}{p+q} < \frac{a}{a+b}$. — Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass für die zweite Urne der Quotient aus der Zahl der darin enthaltenen schwarzen Kugeln durch die Gesammtzahl kleiner ist als für die erste?

Nach dem Ergebniss der Ziehungen aus der ersten Urne ist die Wahrscheinlichkeit, dass für dieselbe der betreffende Quotient zwischen den Grenzen ρ und ρ' liege:

$$= \frac{\int_{\rho}^{\rho'} x^a(1-x)^b dx}{\int_0^1 x^a(1-x)^b dx} = \frac{(a+b+1)!}{a!\, b!} \int\limits_{\rho}^{\rho'} x^a(1-x)^b dx.$$

Und analog ist es für die zweite Urne nach dem Ergebniss der Ziehungen aus derselben.
Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{(a+b+1)!}{a!\, b!} = \nu, \quad \frac{(p+q+1)!}{p!\, q!} = \mu, \quad x^a(1-x)^b = f(x), \quad x^p(1-x)^q = \varphi(x).$$

$$\text{Dann ist} \quad \nu \cdot \int\limits_0^1 f(x)dx = \mu \int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 1.$$

Tragen wir die Werthe von $\nu \cdot f(x)$ und von $\mu \cdot \varphi(x)$ als Ordinaten auf die Achse der x senkrecht auf, so ist für die zweite Urne der Quotient aus den schwarzen Kugeln durch die Gesammtzahl kleiner als für die erste, wenn der wahre Werth desselben in der Figur näher beim Nullpunkt liegt als der entsprechende Werth für die erste Urne. Eine andere Bedingung ist nicht vorhanden, und es dürfen die wahren Werthe dieser Quotienten im Uebrigen auf jede beliebige Stelle der Abscisse fallen. Die einzelnen Stellen haben aber nach dem Resultat der Ziehungen verschiedene Wahrscheinlichkeiten.

Wir theilen die Abscisse von $x = 0$ bis $x = 1$ in zahlreiche gleiche Theile, von denen jeder $= \delta$ ist.

$$\text{Dann ist} \quad P = \nu \cdot \mu \cdot \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{\delta}} \left\{ \int\limits_{(k-1)\delta}^{k\delta} f(x)dx \cdot \int\limits_0^{(k-1)\delta} \varphi(x)dx \right\} \tag{5}$$

$$1 - P = \nu \cdot \mu \cdot \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{\delta}} \left\{ \int\limits_{(k-1)\delta}^{k\delta} f(x)dx \cdot \int\limits_{(k-1)\delta}^{1} \varphi(x)dx \right\} \tag{6}$$

In analoger Weise lassen sich zwei andere Formeln ableiten, indem man zunächst die Theilung der Abscisse für $\mu \cdot \varphi(x)$ ausführt.

Die Ausdrücke sind um so genauer richtig, je kleiner δ genommen wird, und sie werden bis zu jedem beliebigen Grade genau, wenn δ unendlich klein wird. In diesem letzteren Falle wird bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung

$$\int\limits_{(k-1)\delta}^{k\delta} f(x)dx = \delta \cdot f(k\delta);$$

man erhält unter Substitution von neuen Variablen:

$$\begin{aligned} P &= \nu \cdot \mu \cdot \int\limits_{y=0}^{y=1} \int\limits_{x=0}^{x=y} f(y)\varphi(x) dy dx \\ &= \nu \cdot \mu \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x^{a+p+1}(1-x)^b \cdot y^p (1-xy)^q dx dy, \end{aligned}$$

also Formel (1), und in analoger Weise die drei übrigen Fundamentalformeln.

Auch noch in mehrfach anderer Weise können mit Hülfe sachentsprechender Ueberlegungen die gleichen Formeln abgeleitet werden.

Aus den Formeln (1) bis (4) ist ersichtlich und kann auch in directer Weise dargethan Seite 958
werden, dass der Werth der Formel nicht verändert wird, wenn man a mit q und b mit p vertauscht; ferner, dass aus jeder Formel für P eine Formel für $1-P$ und umgekehrt zu entnehmen ist; indem man

entweder a mit b und p mit q vertauscht,

oder a mit p und b mit q vertauscht.

Es sind demnach mit einer dieser Formeln zugleich die drei anderen gegeben; und da dies auch für alle noch abzuleitenden Formeln gilt (von denen zuweilen je zwei gleichlautend werden), so werde ich der Einfachheit wegen von den je vier zusammengehörenden Formeln immer nur eine anführen.

Die Integration der Gleichungen (1) bis (4) ist nur möglich, indem man den aus einer Potenz von $(1-xy)$ bestehenden Factor, unter Umständen mit einiger Umformung, in eine Reihe entwickelt. Auf diesem Wege werden zahlreiche verschiedene Formeln erhalten, von denen ich nur einige anführe. Man erhält z. B.

$$(7) \quad 1-P = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!)}{(a+b+q+2)!\,b!} \left\{ 1 + \frac{(a+1)(q+1)}{1\cdot(a+b+q+3)} + \right. \\ + \frac{(a+1)(a+2)\cdot(q+1)(q+2)}{1\cdot 2\cdot(a+b+q+3)(a+b+q+4)} + \dots \\ \left. \dots + \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+p)\times(q+1)(q+2)\dots(q+p)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p\times(a+b+q+3)(a+b+q+4)\dots(a+b+q+p+2)} \right\}$$

Diese Reihe ist der Anfang einer hypogeometrischen Reihe, die aber nach $p+1$ Gliedern abgebrochen wird. Die vollständige Reihe in Verbindung mit dem aus Facultäten bestehenden Factor würde $= 1$ sein. Darum gibt der Rest der Reihe einen

Werth für P.

$$(8)\quad P=\frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p+1)!\,(b+q+1)!)}{a!\,b!\,(p+1)!\,q!\,(a+b+p+q+3)!}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{(a+p+2)(p+q+2)}{(p+2)(a+b+p+q+4)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(a+p+2)(a+p+3)\cdot(p+q+2)(p+q+3)}{(p+2)(p+3)(a+b+p+q+4)(a+b+p+q+5)}\quad\underset{\textit{in infin.}}{+++}\quad\right\}$$

Unter Anwendung einer von Kummer (Crelle's Journal, Bd. 15, S. 172) angegebenen Transformation erhält man aus Formel (8) die für die praktische Anwendung besonders bequemen Formeln I. und II. auf Seite 946.

Auch die folgenden Formeln, die aus dem gleichen Doppelintegral erhalten werden können, sind ganz brauchbar zur Berrechung, wenn auch etwas weniger bequem:

$$(9)\quad 1-P=\frac{(a+b+1)!\,(b+q+1)!\,(a+p)!\,(p+q)!)}{a!\,b!\,p!\,q!\,(a+b+p+q+2)!}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{p(a+b+p+q+2)}{(a+p)(p+q)}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)\cdot(a+b+p+q+2)(a+b+p+q+1)}{(a+p)(a+p-1)(p+q)(p+q-1)}+++\right\}$$

$$(10)\quad 1-P=\frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p)!\,(b+q)!)}{a!\,b!\,p!\,(q+1)!\,(a+b+p+q+2)!}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{p(b+q+2)}{(a+p)(q+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)\cdot(b+q+2)(b+q+3)}{(a+p)(a+p-1)(q+2)(q+3)}+++\right\}$$

Weniger brauchbar erweisen sich die Reihen, bei welchen die Vorzeichen der Gleider wechseln.

Jede einzelne der Formeln lässt sich, auch ohne dass man auf das ursprünglche Integral zurückgeht, in jede der anderen umwandeln. Bei der Anwendung auf Zahlenbeispiele ergeben, was übrigens selbstverständlich ist, die verschiedenen Formeln genau gleiche Resultate.

Ich bemerke noch, dass ich meine Formeln dem Professor der Physik Herrn Hagenbach-Bischoff und dem Professor der Mathematik Herrn Kinkelin in Basel vorgelegt habe, und dass Diese die Richtigkeit derselben bestätigten, indem sie, zum Theil auch auf anderen Wegen, zu identischen Resultaten gelangten.

Seite 959 bis 962

Logarithmen der Facultäten.

[A. d. Hrsg.: Vier Seiten mit Tabellen wurden weggelassen. Darin werden für alle $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 1200$ die Logarithmen zur Basis 10 der Fakultät $\alpha!$ auf 5 bzw. 4 (für $\alpha \geq 450$) Nachkommastellen aufgeführt.]